XALQARO NORDIK UNIVERSITETI

Iqtisodiyot va pedagogika fakulteti,
Iqtisodiyot va biznesni boshqarish kafedrasi

Fan o‘qituvchisi: Sabirov Xasan Nusratovich

Mavzu: ENG KICHIK KVADRATLAR USULI VA GAUSS-MARKOV TEOREMASI

Reja:

1. **Eng kichik kvadratlar (EKK) usuli**
2. **Gauss-Markov teoremasi**
3. **Eng kichik kvadratlar usuli xisobdash metodikasi**
4. **Natijalarni talqin etish**

Eng kichik kvadratlar (EKK) usuli

Regressiya modelining $\hat{a}_0$ va $\hat{a}_1$ parametrlarini hisoblash uchun ma`lum bir qoida yoki metod kerak. Ilmiy adabiyotlarda bir nechta metod va usullar mavjud bo`lsada, ularda eng ko`p tarqalgani eng kichik kvadratlar (EKK) usulidir. Bu usul yordamida o`tkazilgan regressiya chizig`i, ya`ni ($\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$) parametrlari shunday tanlanadiki, unda har bir nuqtada chiziqqacha bo`lgan vertical masofalar ( $\hat{e}_i$ ) kvadratlari yig`indisi minimallashadi, ya`ni:

$$S(\beta_0, \beta_1) = \hat{\beta}_0^{min} \hat{\beta}_1 \sum \hat{u}_i^2 = \sum \left[y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_0 x_i)\right]^2$$

Muammo esa $\hat{a}_0$ va $\hat{a}_1$ larni qulay yo`l bilan topishdadir. Agar y va x bo`yicha n nafar kuzatishlar yig`ilgan bo`lsa, unda biz “kvadratlar yig`indisi” funktsiyasini kamaytiradigan noma`lum parametirlar $\hat{a}_0$ va $\hat{a}_1$ uchun qiymatlarni topishni istaymiz va quyidagi formula orqali topishimiz ham mumkin:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Bu yerda $\bar{y} = \sum y_i/n$ va $\bar{x} = \sum x_i/n$.

Masofalarning kvadratlari olinishining sababi shundaki, kvadrat olinmasdan yig`indi olinsa, musbat (nuqta chiziqdan yuqorida bo`lsa) va manfiy (nuqta chiziqdan pastda bo`lsa) masofalar bir-birini neytrallashtiradi.

EKK usuli yordamida hisoblangan regressiya chizig`ini quyidagicha yozish mumkin

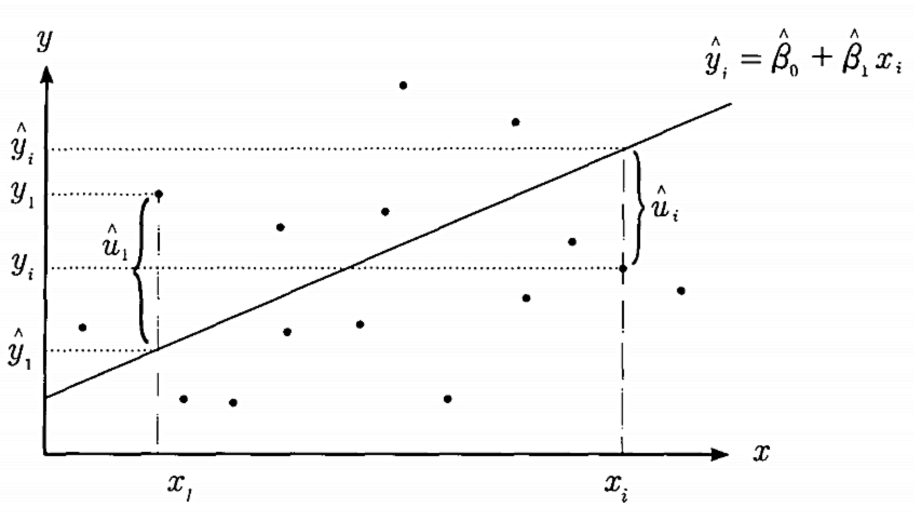
$$\hat{C}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 INC_i$$

Bunda, $\hat{\alpha}_0$ va $\hat{\alpha}_1$ tanlamadan hisoblangan parametrlar, $\hat{C}_i$ esa i tartibdagi oilaning modellashtirilgan yoki hisoblangan oziq-ovqat iste`moli.

Har bir nuqtadan hisoblangan regressiya chizig`igacha vertikal masofa eng kichik kvadratlar qoldig`i yoki qoldiq deyiladi va ular quyidagicha ifodalanadi:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

Regressiya parametirlarini hisoblashdan chiqqan qoldiqlar $\hat{u}_i$ har bir qoldiq bilan bog`liq $\hat{y}_i$ va y o`rtasidagi munosabat quyidagi rasmda tasvirlangan.



Bugungi kunda bu kabi hisob-kitoblar Microsoft Excel, Stata, EViews kabi kompyuter dasturlari yordamida amalga oshiriladi. Har bir dasturiy to`plamning regressiya natijasi bir biridan biroz farq qiladi, chunki ishlatiladigan atamalar turlicha.

Hisoblangan parametirlarni iqtisodiy talqini zarur masala sifatida ko`riladi. Ko`p tadqiqotchilar amaliyotda murakkab hisob-kitoblarni amalga oshirsa-da, ularni talqin qilishda yetarli ahamiyat berishmaydi. Regressiya chizig`ining ordinate o`qi bilan kesishgan nuqtasi $\hat{\alpha}_0$ va qiyaligi $\hat{\alpha}_1$ hisoblanadi.

Ekonometrik amaliyotda $\hat{a}_0 < 0$ bo`lib chiqish holatlari ko`p uchraydi. Statistik nuqtai nazardan $E(u) = 0$ shartini qoniqtirish uchun $\hat{a}_0 < 0$ bo`lishi kerak, ammo uning iqtisodiy talqini mavjud emas. Shu nuqtai nazardan regression hisob natijalarini tahlil qilishda $\hat{a}_0$ qandaydir iqtisodiy ma`noga ega bo`lishi yoki bo`lmasligi muhim emas, $\hat{a}_1$ qiyalik parametrining iqtisodiy talqini esa muhim.

Gauss-Markov teoremasi

Stoxastik tahlil bilvosita aloqalarni o'rganishga yo'naltirilgan, ya'ni ta'siri to'g'ri bo'lmagan, boshqalar orqali ta'sir etadigan (uzluksiz zanjir bo'yicha to'g'ri aloqalarni aniqlash imkoni bo'lmaganida) omillarni aniqlashga qaratilgan. Bundan determinallashgan va stoxastik tahlil o'rtasidagi munosabat (nisbat) haqida muhim xulosa kelib chiqadi: to'g'ri bog'lanishlarni birinchi navbatda o'rganish kerakligi uchun, stoxastik tahlil yordamchi xarakter kasb etadi. Stoxastik tahlil omillar bo'yicha determinallashgan model tuzib bo'lmaganida, ularni chuqur determinallashgan tahlilni o'rganish quroli sifatida foydalaniladi.

Xo'jalik faoliyatining ba'zi bir tomonlarini o'zaro bog'lanishlarini omilli tahlilining stoxastik modellashtirish xo'jalik faoliyati omillari va natijalarining miqdoriy xarakteristikalari - iqtisodiy ko'rsatkichlarning qiymatlarini tebranish qonuniyatlarini umumlashtirishga tayanadi. Bog'lanishlarning miqdoriy parametrlari xo'jalik ob'ektlari to'plami yoki davrlarida o'rganilayotgan ko'rsatkichlarning qiymatlarini qiyoslash (solishtirish) asosida aniqlanadi. Shunday qilib, stoxastik modellashtirishning birinchi asosi bo'lib, kuzatishlar to'plamini tashkil eta olish, ya'ni bir hodisa parametrini turli sharoitlarda qaytadan o'lchash imkoniyatlari hisoblanadi.

Determinallashgan omilli tahlilda o'rganilayotgan ob'ektning modeli xo'jalik ob'ektlari va davrlari bo'yicha o'zgarmaydi (negaki, mos keluvchi asosiy kategoriyalarning nisbati barqarordir). Alohida xo'jaliklar yoki bir xo'jalikni turli, alohida davrlardagi faoliyatlari natijalarini qiyoslash zaruriyati tug'ilganida model asosida aniqlangan miqdoriy analitik natijalarni qiyoslash haqida savol tug'ilishi mumkin. Stoxastik tahlilda modelning o'zi empirik ma'lumotlar to'plami asosida tuzilgani uchun, haqiqiy modelni hosil qilishning asosi bo'lib barcha dastlabki kuzatishlar bo'yicha bog'lanishlarning miqdoriy xarakteristikalarini mos kelishi hisoblanadi. Bundan kelib chiqadiki, ko'rsatkichlarning qiymatini o'zgarishi hodisalarni bir xildagi aniqlik chegarasida amalga oshishi kerak, ularning xarakteristikalari bo'lib modellashtirilayotgan iqtisodiy ko'rsatkichlar hisoblanadi (o'zgarish chegarasida ifodalanayotgan hodisaning xarakterida sifatning keskin o'zgarishi (sakrashi) ro'y bermasligi kerak). Shunday ekan, bog'lanishlarni modellashtirishda stoxastik yondashishning qo'llanishini ikkinchi asosi bo'lib, to'plamni sifatli, bir jinsliligi hisoblanadi.

Iqtisodiy ko'rsatkichlarning o'rganilayotgan qonuniyatlari (modellashtirilayotgan bog'lanish) yashirin tarzda namoyon bo'ladi. O'rganish, izlanish nuqtai nazardan bu ko'rsatkichning tasodifiy o'zgarishi va kovariasiya komponentalari bilan aralashib ketadi. Katta sonlar qonuni bo'yicha faqat katta to'plamda bog'lanish qonuniyatlari o'zgarish yo'nalishlariga tasodifiy mos kelishidan kuchliroq namoyon bo'ladi (tasodifiy kovariasiya). Bundan statistik tahlilning uchinchi asosi kelib chiqadi – o'rganilayotgan qonuniyatlarni (modellashtirilayotgan bog'lanishlarni) etarli ishonchlik va aniqlikda aniqlash uchun kuzatishlar to'plami etarli darajada (miqdorda) bo'lishi kerak. Modelni ishonchli aniqlik darajasi modelni ishlab chiqarish xo'jalik faoliyatini boshqarishdagi amaliy maqsadlarda foydalanish mumkinligi bilan aniqlanadi.

Stoxastik tahlil yondashishining to'rtinchi asosi – iqtisodiy ko'rsatkichlarning bog'lanishlarini miqdoriy parametrlarini ko'rsatkich darajasini tebranishini ommaviy ma'lumotlaridan aniqlash imkonini beruvchi usullarning mavjudligi. Qo'llanilayotgan usullarning matematik apparati ba'zida modellashtirilayotgan empirik ma'lumotlarga o'ziga xos bo'lgan talablarni qo'yadi. Ushbu talablarni bajarish usullarini qo'llash va olingan natijalarni ishonchli bo'lishi uchun ahamiyatli asos hisoblanadi.

Stoxastik omilli tahlilning asosiy xususiyati shundan iboratki, stoxastik tahlilda modelni sifatli (nazariy) tahlil yo'li bilan tuzib bo'lmaydi, buning uchun empirik ma'lumotlarning miqdoriy tahlili zarur bo'ladi.

Chiziqli regressiya modeliga qo`yiladigan shartlarga e`tibor qaytaramiz.

1. Erksiz o`zgaruvchi y erkli o`zgaruvchi x bilan quyidagicha bog`langan:

$$Y = a_0 + a_1 x + u$$

2. Tasodifiy xatolik e matematik kutilishi 0 ga teng $E(u) = 0$. Ushbu shart quyidagi ifodaga ekvivalent hisoblanadi:

$$E(y|x) = a_0 + a_1 x$$

3. Tasodifiy xatolik u dispersiyasi o`zgarmas (xomoskedastiklik)

$$var(u) = \sigma^2 = var(y)$$

4. Ikki xatolik o`rtasidagi kovariatsiya 0ga teng

$$cov(u_i, u_j) = cov(y_i, y_j)$$

5. Erkli o`zgaruvchi x tasodifiy emas va kamida ikkita qiymat qabul qiladi.

Gauss-Markov teoremasiga muvofiq, yuqorida keltirilgan chiziqli regressiya modelining shartlari qoniqtirilsa, EKK usuli yordamida hisoblangan $\hat{a}_0$ va $\hat{a}_1$ parametrlar barcha chiziqli va siljimagan baholar ichida eng kichik dispersiyaga ega bo`ladi.

Agar chiziqli regressiya modeliga qo`yilgan shartlardan biri buzilsa, Gauss-Markov teoremasi natijasi noto`g`ri bo`lib chiqadi va boshqa hisoblash usullari qo`llaniladi. Masalan, 3-shart (xomoskedastiklik) qonoqtirilmasa, hisoblangan baholar dispersiyasi noto`g`ri bo`ladi va teorema natijasi Gauss-Markov teoremasiga muvofiq bo`lmaydi. Gauss-Markov teoremasiga tegishli bo`lmagan chiziqli regressiyaga qo`yiladigan shartlardan yana biri bu tasodifiy xatolikning normal taqsimot qonuniga bo`y sunishidir (normallik sharti):

$$u \sim N(0, \sigma^2)$$

Eng kichik kvadratlar usuli xisobdash metodikasi

Mezon: xaqiqiy mikdorlarning tekislangan miqdorlardan farqining kvadratlari yig'indisi eng kam bo'lishi zarur.

$$S = \sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2 \to \min$$

Misol: $Y_t = a_0 + a_1 t$

Qiymat $\sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2$ bo'lishi uchun birinchi darajali xosilalar nolga teng bo'lishi kerak.

$$S = \sum \left(Y - \overline{Y}_t\right)^2 = \sum \left(Y - a_0 - a_1 t\right)^2 \to \min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=0 \qquad \frac{\partial S}{\partial a_0}=0 \qquad \to \begin{cases} n\cdot a_0+a_1\sum t=\sum y \\ a_0\sum t+a_1\sum t^2=\sum y\cdot t \end{cases}$$

Normal tenglamalar tizimi.

$$S=\sum\left(Y-\overline{Y}_t\right)^2$$

Demak

$$\overline{Y}=a_0+a_1x+a_1x^2+\ldots+a_nx^n$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=\sum\left[2\left(Y-a_0-a_1X-a_2X^2-\ldots-a_nX^n\right)\right]\cdot(-1)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=\sum\left[2\left(Y-a_0-a_1X-a_2X^2-\ldots-a_nX^n\right)\right]\cdot(-X)=0$$

....

$$\frac{\partial S}{\partial a_n}=\sum\left[2\left(Y-a_0-a_1X-a_2X^2-\ldots-a_nX^n\right)\right]\cdot\left(-X^n\right)=0$$

Chizikli funktsiya bo'yicha tekislanganda

$$\overline{Y}=a_0+a_1X$$
$$S=\sum\left(Y-a_0-a_1X\right)^2\to\min$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0}=\sum 2\left(Y-a_0-a_1X\right)\cdot(-1)=0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1}=\sum 2\left(Y-a_0-a_1X\right)\cdot(-X)=0 \end{cases}$$

Bunda

$$\begin{cases} \sum y-n\cdot a_0-a_1\sum X=0 \\ \sum y\cdot X-a_0\sum X-a_1\sum X^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n\cdot a_0+a_1\sum X=\sum y \\ a_0\sum X+a_1\sum X^2=\sum y\cdot X \end{cases}$$

Nazorat uchun savollar

1. "Eng kichik kvadratlar usuli" ning mohiyatini tushuntirib bering.
2. Normal tenglamalar sistemasini yechish usullarini tushuntirib bering.
3. To'g'ri chiziq bo'yicha eng kichik kvadratlar usuli yordamida tenglash qanday amalga oshiriladi?

4. Gauss-Markov teoremasining xususiyatlarini tushuntirib bering.